Vecteurs du plan

Définition

A, B, C et D sont des points du plan tels que:

- $AB = CD$: segments de même longueur.
- $(AB) // (CD)$ ou $ABCD$ alignés: droite(s) de même direction
- [AB] et [CD] sont dans le même sens

On écrit alors: $\vec{V} = \vec{AB} = \vec{CD}$ et l'on dit que le vecteur $\vec{V}$ est représenté par $\vec{AB}$ ou par $\vec{CD}$.

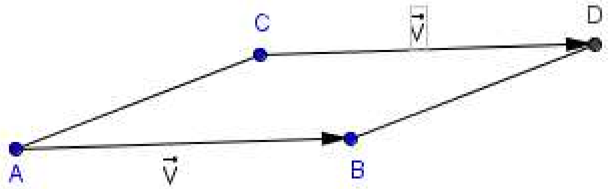
Les trois conditions précédentes peuvent se résumer en une seule phrase:

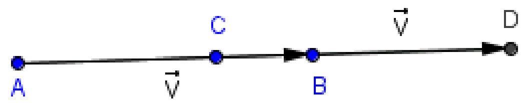
$$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme (éventuellement aplati).}$$

Pour éviter le cas particulier des points alignés, on écrit:

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow [AD] \text{ et } [BC] \text{ ont le même milieu.}$$

Voir les deux configurations ci-dessous illustrant la définition.





Lorsque $\vec{V} = \vec{AB}$, le point A est l'*origine* de $\vec{AB}$ et le point B est l'*extrémité* de $\vec{AB}$.
Lorsque $\vec{V} = \vec{AB} = \vec{CD}$, les couples de points $(A\,;B)$ et $(C\,;D)$ sont des *représentants* du vecteur $\vec{V}$.

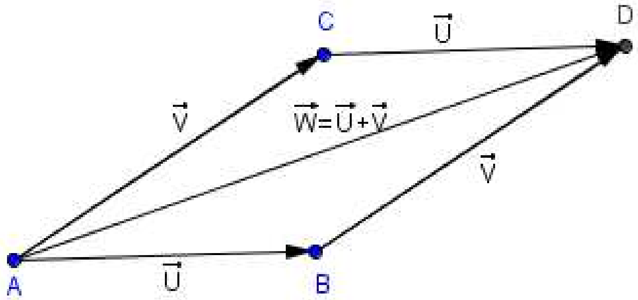
Vecteurs particuliers

- Vecteur nul $\vec{0}$: vecteur dont les représentants ont origine et extrémité confondues. $\vec{0} = \vec{AA} = \vec{BB}$
- Vecteurs opposés: $\vec{AB}$ et $\vec{BA}$ sont deux vecteurs opposés (origine et extrémité échangées: changement de sens). Si $\vec{V} = \vec{AB}$, le vecteur opposé de $\vec{V}$ est noté $-\vec{V}$. On a donc: $\vec{BA} = -\vec{V}$.

Somme de deux vecteurs. Égalité de Chasles

Si $\vec{U} = \vec{AB} = \vec{CD}$ et $\vec{V} = \vec{AC} = \vec{BD}$, alors:

$$\vec{W} = \vec{U} + \vec{V} = \vec{AD}$$



Cette définition correspond aux deux ***égalités de Chasles:*** $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$ et $\vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$.

Par construction, $ABDC$ étant un parallélogramme, on a la ***règle du parallélogramme***: $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$.

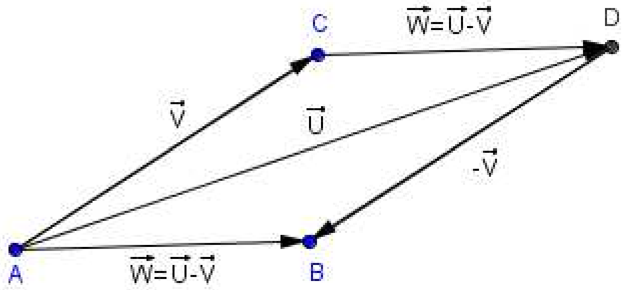
Réciproquement, si $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$, d'après Chasles, on a aussi: $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$ et donc, $\vec{AC} = \vec{BD}$, ce qui prouve que $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Conclusion: $ABDC$ parallélogramme si et seulement si $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$

Remarque: Le choix du signe + pour noter cette opération sur les vecteurs est lié avec les coordonnées d'un vecteur dans un repère. Nous verrons bientôt, mais vous savez probablement cela depuis la classe de troisième, que pour calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs, il suffit de calculer la somme des coordonnées de ces deux vecteurs.

Différence de deux vecteurs

$\vec{U}-\vec{V}=\vec{W}$ signifie que $\vec{U}=\vec{V}+\vec{W}$



On a: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$,
c'est à dire $\overrightarrow{CD}=\vec{U}-\vec{V}$

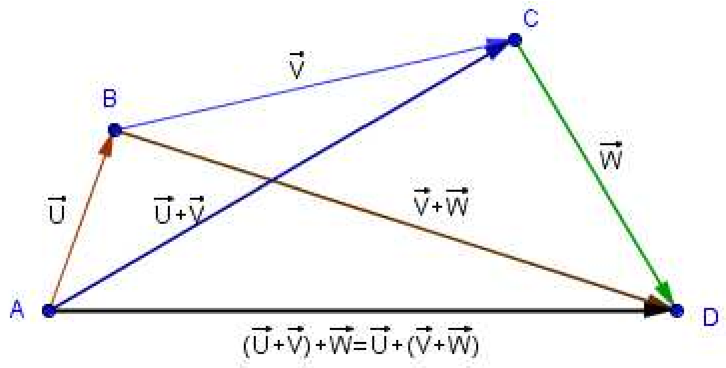
$ABDC$ étant un parallélogramme, on a aussi:
$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\vec{U}+(-\vec{V})$.

Conclusion: $\vec{U}-\vec{V}=\vec{U}+(-\vec{V})$.

Comme pour les réels, soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.

Propriétés de l'addition des vecteurs

- $\vec{U}+\vec{0}=\vec{U}$. C'est évident: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$.
- $\vec{U}+(-\vec{U})=\vec{0}$. Évident: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$.
- $\vec{U}+\vec{V}=\vec{V}+\vec{U}$. Évident: voir parallélogramme du bas de la page 1.
- $(\vec{U}+\vec{V})+\vec{W}=\vec{U}+(\vec{V}+\vec{W})$.



On a:
$\vec{U}+\vec{V}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{W}=\overrightarrow{CD}$
Donc:
$(\vec{U}+\vec{V})+\vec{W}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

D'autre part:
$\vec{V}+\vec{W}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}$ et $\vec{U}=\overrightarrow{AB}$
Donc:
$\vec{U}+(\vec{V}+\vec{W})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$.

Ceci prouve bien la propriété. Comme l'emplacement des parenthèses n'a pas d'importance dans la somme de trois vecteurs, on s'autorise le droit de ne plus mettre de parenthèses du tout.
On écrira alors tout simplement ce vecteur: $\vec{U}+\vec{V}+\vec{W}$.

Exemple d'utilisation de ces propriétés pour simplifier des écritures vectorielles

$\vec{V}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$. En transformant les soustractions en additions du vecteur opposé:

$\vec{V}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}$. En modifiant l'ordre des termes:

$\vec{V}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}$. En regroupant les termes pour utiliser l'égalité de Chasles, on obtient:

$\vec{V}=\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}+\vec{0}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}$. Donc $\vec{V}=\overrightarrow{CD}$

On remarquera sur cet exemple qu'il est inutile de faire un dessin et des raisonnement géométriques pour transformer des écritures vectorielles. Il suffit d'appliquer les propriétés de calcul.

Nous verrons par la suite que de nombreux problèmes géométriques peuvent être résolus grâce aux calculs vectoriels. Mais pour que cela soit efficace, il faut inventer une deuxième opération sur les vecteurs, ou plutôt, une opération qui relie les vecteurs et les nombres réels.
Avant de donner une définition générale de cette nouvelle opération, voyons quelques exemples particuliers !

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

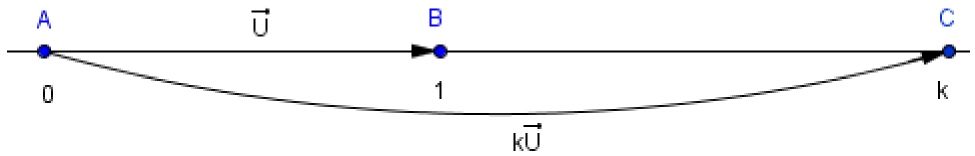
Définition

Si $\vec{U}$ est un vecteur et $k \in \mathbb{R}$, on a:

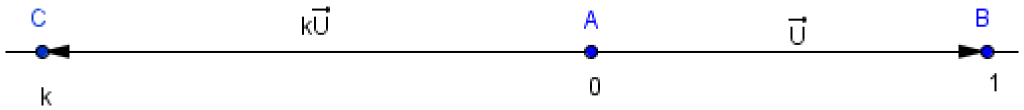
- Si $\vec{U} \neq \vec{0}$, on prend $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$ avec $A \neq B$. On définit alors le vecteur $\vec{V} = k\,\vec{U}$ par le procédé suivant: $\vec{V} = \overrightarrow{AC}$ où le point C est le point de la droite (AB) dont l'abscisse est k en prenant A pour origine (abscisse 0) et B pour point unité (abscisse 1).
- Si $\vec{U} = \vec{0}$, on décide que $k\,\vec{0} = \vec{0}$.

Illustrations et précisions

- Si $k > 0$, les vecteurs $\vec{U}$ et $k\,\vec{U}$ sont de même sens et $AC = kAB$.



- Si $k < 0$, les vecteurs $\vec{U}$ et $k\,\vec{U}$ sont de sens contraire et $AC = -kAB$.



Dans les deux cas, A, B et C sont alignés et $AC = |k|AB$.

Propriétés du produit d'un vecteur par un réel et liaison avec la somme vectorielle

Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont deux vecteurs et k et k' deux nombres réel, on a:

- $k\,\vec{U} = \vec{0}$ équivaut à : $k = 0$ ou $\vec{U} = \vec{0}$.
- $1\,\vec{U} = \vec{U}$ et $(-1)\,\vec{U} = -\vec{U}$.
- $k\left(k'\,\vec{U}\right) = (kk')\,\vec{U}$.
- $(k + k')\,\vec{U} = k\,\vec{U} + k'\,\vec{U}$.
- $k(\vec{U}+\vec{V}) = k\vec{U} + k\vec{V}$.

Schémas illustrant les propriétés précédentes:

Vecteurs colinéaires

Question: Si $\vec{U}=\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ et $k\in\mathbb{R}^*$, on sait représenter le vecteur $k\,\vec{U}=k\,\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ sur la droite (AB).

Comment faire pour $k\,\vec{U}=\overrightarrow{DE}$ où $D\notin(AB)$?

Représenter ci-dessous $A,\ B,\ C,\ D$ et E en prenant $k=2{,}5$ par exemple:

Propriétés et définition

Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $k\neq 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $k\,\vec{u}$ sont représentés par des couples de points qui sont:

- Soit alignes sur une droite,
- Soit situés sur deux droites parallèles.

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $k\,\vec{u}$ sont ***colinéaires***. Le nombre réel k est le coefficient de colinéarité.

Points alignés: Traduction vectorielle de l'alignement de trois points.

$C\in(AB)$ *équivaut à:* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

C'est à dire:

$C\in(AB)$ *équivaut à:* il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}$

Droites parallèles: Traduction vectorielle du parallélisme de deux droites.

$(AB)\,//\,(CD)$ *équivaut à:* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

C'est à dire:

$(AB)\,//\,(CD)$ *équivaut à:* il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{CD}=k\,\overrightarrow{AB}$

Vecteurs directeurs d'une droite:

Tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est appelé ***vecteur directeur*** de la droite (AB).

Par exemple, les vecteurs: $\overrightarrow{AB},\ 2\,\overrightarrow{AB},\ -5\,\overrightarrow{AB}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (AB).

On peut donc faire les remarques utiles suivantes:

- Deux vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires.
- Deux vecteurs directeurs de deux droites parallèles sont colinéaires.
- Deux vecteurs colinéaires non nuls sont des vecteurs directeurs de la même droite ou de deux droites parallèles.

Application à des configurations planes élémentaire

Partie rédigée en classe avec vous.

1. Milieu d'un segment
2. Droite des milieux dans le triangle
3. Médianes et centre de gravité d'un triangle.