

## 1<sup>ère</sup> S4 Devoir à la maison n°1

Pour Vendredi 12 Septembre 2008.

On cherche à calculer le nombre  $A(x; y) = 25x^4 - y^4 + 2y^2$ .  
pour  $x = 2403763488$  et  $y = 5374978561$ .

- 1) A l'aide de votre calculatrice et d'autres calculatrices de votre entourage (de modèles différents à préciser), calculer  $A(2403763488; 5374978561)$ .  
Réaliser un tableau comparatif des résultats obtenus. Qu'en pensez-vous?
- 2) Afin de résoudre de façon exacte ce problème, on va utiliser l'égalité  $(E) : y^2 = 5x^2 + 1$ .
  - a) Montrer que, si un couple  $(x; y)$  vérifie l'égalité  $(E)$ , alors:  $A(x; y) = 1$ .
  - b) La propriété réciproque de la question a) est-elle vraie ? Pourquoi ?
  - c) Trouver deux entiers naturels simples vérifiant l'égalité  $(E)$ .
  - d) Démontrer que si l'égalité  $(E)$  est vraie pour un couple  $(x; y)$  quelconque, alors elle est encore vraie pour le couple  $(X; Y) = (2xy; 5x^2 + y^2)$ .
  - e) A l'aide des résultats des questions c) et d), déterminer des couples  $(x; y)$  d'entiers naturels de plus en plus grands vérifiant l'égalité  $(E)$ .  
Constater que le couple  $(2403763488; 5374978561)$  est ainsi obtenu.
  - f) Conclure!