

1^{ère} S4 Devoir à la maison n°1

Pour Vendredi 12 Septembre 2008.

On cherche à calculer le nombre $A(x; y) = 25x^4 - y^4 + 2y^2$.
pour $x = 2403763488$ et $y = 5374978561$.

- 1) A l'aide de votre calculatrice et d'autres calculatrices de votre entourage (de modèles différents à préciser), calculer $A(2403763488; 5374978561)$.
Réaliser un tableau comparatif des résultats obtenus. Qu'en pensez-vous?
- 2) Afin de résoudre de façon exacte ce problème, on va utiliser l'égalité $(E) : y^2 = 5x^2 + 1$.
 - a) Montrer que, si un couple $(x; y)$ vérifie l'égalité (E) , alors: $A(x; y) = 1$.
 - b) La propriété réciproque de la question a) est-elle vraie ? Pourquoi ?
 - c) Trouver deux entiers naturels simples vérifiant l'égalité (E) .
 - d) Démontrer que si l'égalité (E) est vraie pour un couple $(x; y)$ quelconque, alors elle est encore vraie pour le couple $(X; Y) = (2xy; 5x^2 + y^2)$.
 - e) A l'aide des résultats des questions c) et d), déterminer des couples $(x; y)$ d'entiers naturels de plus en plus grands vérifiant l'égalité (E) .
Constater que le couple $(2403763488; 5374978561)$ est ainsi obtenu.
 - f) Conclure!