CD Thème d'étude

9. Crible d'Ératosthène

OBJECTIF : Mettre en œuvre un crible pour déterminer des nombres premiers.

On a rangé les entiers de 1 à 100 dans ce tableau que l'on recopiera.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

A. ➡ Mise en œuvre du crible

1. Barrer le nombre 1 qui n'est pas premier.

2. Le plus petit nombre non barré est 2.
Barrer tous les multiples de 2 sauf 2.

3. Le plus petit nombre non barré est 3.
Barrer tous les multiples de 3 sauf 3.

4. Faire de même avec 5 puis avec 7.

5. Choisir quelques nombres non barrés dans le tableau.
Sont-ils premiers ?

6. À votre avis, quel est le but de ce crible d'Ératosthène ?

Point info

Ératosthène (IIIe siècle avant J.-C.) dirigea la grande bibliothèque d'Alexandrie. Il reste particulièrement connu pour son crible, sa mesure du rayon terrestre et ses travaux sur la chronologie.

B. ➡ Démonstration

n désigne un nombre quelconque non barré dans le tableau. On a donc $11 \leqslant n \leqslant 100$.

1. n est-il divisible par 2, 3, 5 ou 7 ? Peut-il être divisible par 4, 6, 8 ou 10 ? par 9 ?

2. On suppose maintenant que n n'est pas premier.

a. Expliquer pourquoi les diviseurs de n autres que 1 sont supérieurs ou égaux à 11.
Supposons que $n = m \times k$ où m et k sont des entiers, avec $m \geqslant 11$ et $k \geqslant 11$.

b. Justifier les inégalités suivantes : $m \times k \geqslant 11 \times k$ et $11 \times k \geqslant 121$.

c. En déduire que $n \geqslant 121$.
Est-ce possible ? Que peut-on en déduire sur n ?