Corrigé des exercices du livre faits en classe

Exercice n° 9 p 97

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{5}{2}x^2 + 3x - 1$.

Donc: $f'(x) = -5x + 3$.

On a $-5x + 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{3}{5}$. Conclusion:

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{-1}{10}$	↘	

Exercice n° 11 p 97

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x$.

Donc: $f'(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ qui est négatif entre les 2 racines -1 et 2. Conclusion:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{7}{6}$	↘	$\frac{-10}{3}$	↗	

Exercice n° 13 p 97

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (2x-1)^3$.

Donc: $f'(x) = 6(2x-1)^2 \geqslant 0$. Conclusion:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$			↗		

Exercice n° 17 p 97

Pour $x \in \left[-10\,; \dfrac{1}{2}\right]$, $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$.

Donc: $f'(x) = -\dfrac{2}{(x-1)^2} < 0$. Conclusion:

x	-10		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$-\frac{2}{11}$	↘	-1

Exercice n° 18 p 97

Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 1$.

Donc: $f'(x) = -12x^3 + 10x^2 = 12x^2(1-x)$ qui a le signe de $1-x$ car $12x^2 \geqslant 0$. Conclusion:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$			↗		2	↘	

Exercice n° 19 p 97

Pour $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-2}$.

Donc: $f'(x) = \dfrac{2x(x-2) - (x^2+3)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x - 3}{(x-2)^2}$.

$(x-2)^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que le trinôme $x^2 - 4x - 3$. $\Delta = 28 = (2\sqrt{7})^2$. Le trinôme a 2 racines: $x = \dfrac{4 - 2\sqrt{7}}{2} = 2 - \sqrt{7}$ ou x= $2 + \sqrt{7}$. Donc:

x	$-\infty$		$a = 2-\sqrt{7}$		2		$b = 2+\sqrt{7}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$f(a)$	↘	‖	↘	$f(b)$	↗	

Exercice n° 20 p 97

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = x + 4 + \dfrac{1}{x}$.

Donc: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

$x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x^2 - 1$ qui est négatif entre ses racines -1 et 1. Conclusion:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	2	↘	‖	↘	6	↗	

Exercice n° 22 p 98

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$. Donc:

$f'(x) = 2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ car $x > 0$, donc $2x > 0$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ car $\sqrt{x} > 0$. La somme est donc positive.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	↗	

Exercice n° 23 p 98

Pour $x\in\mathbb{R}^{+*}$, $f(x)=-\sqrt{x}-2x$. Donc:

$f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-2<0$ car $\sqrt{x}>0$. Donc:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
$f(x)$	‖	↘

Exercice n° 24 p 98

Pour $x\in\mathbb{R}^{*}$, $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x}$.

On a: $f'(x)=3x^2+\dfrac{1}{x^2}>0$ car $x^2>0$.

Conclusion:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$		↗	‖	↗	

Exercice n° 52 p 101

a) La contenance de 1L correspond à 1000 cm^3.
Le volume de la casserole est: $\pi x^2 h=1000$.

Donc $h=\dfrac{1000}{\pi x^2}$

b) Aire du disque du fond: πx^2.
Aire latérale: on a un rectangle de largeur h et de longueur la circonférence de la base. Donc, l'aire latérale est: $2\pi xh=2\pi x\dfrac{1000}{\pi x^2}=\dfrac{2000}{x}$.

Donc: $S(x)=\pi x^2+\dfrac{2000}{x}$

c) $S'(x)=2\pi x-\dfrac{2000}{x^2}=\dfrac{2\pi x^3-2000}{x^2}$ qui a le signe de $2\pi x^3-2000$.

On a: $2\pi x^3-2000\geqslant 0\Leftrightarrow x^3\geqslant\dfrac{1000}{\pi}$.

La fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ceci équivaut à: $x\geqslant\sqrt[3]{\dfrac{1000}{\pi}}$

D'où le tableau des variations de S:

x	0		$\sqrt[3]{\dfrac{1000}{\pi}}$		$+\infty$
$S'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$S(x)$	‖	↘	$S\left(\sqrt[3]{\dfrac{1000}{\pi}}\right)$	↗	

d) L'aire minimale est donc obtenue pour $x^3=\dfrac{1000}{\pi}$

Or $h=\dfrac{1000}{\pi x^2}$, donc: $h=x$.

Exercice n° 47 p 100

1) a) Il faut que: $0<2x<3$. Donc: $x\in\left]0\,;\dfrac{3}{2}\right[$.

b) La base est un carré de côté $3-2x$. L'aire de la base est donc: $(3-2x)^2$. La hauteur est x. Donc:
$V(x)=x(3-2x)^2$
2) a) $V'(x)=1(3-2x)^2+x\times 2(3-2x)\times(-2)$.
$V'(x)=(3-2x)(3-2x-4x)=(3-2x)(3-6x)$

$V'(x)$ a pour racines $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$ et est négatif entre ses racines ($a=12>0$).
Donc:

x	0		$\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{3}{2}$	
$V'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	
$V(x)$	‖	↗	2	↘	‖	

b) La cuve de volume minimum (2 m^2) a pour hauteur $x=0{,}5\,m=50\,cm$ et la longueur du côté de sa base carrée est $3-3\times 0{,}5=1{,}5\,m$

Exercice n° 46 p 100

a) Le volume de la cuve est: $x^2 l=4$. Donc $l=\dfrac{4}{x^2}$.

b) L'aire $S(x)$ de la surface à peindre est la somme de l'aire du fond x^2 et de l'aire latérale $4lx=\dfrac{16}{x}$. Donc:

$S(x)=x^2+\dfrac{16}{x}$.

c) Pour répondre à cette question, étudions les variations de S.

On a: $S'(x)=2x-\dfrac{16}{x^2}=\dfrac{2(x^3-8)}{x^2}$. On a $x^2>0$. Il faut donc connaître le signe de x^3-8. On sait que $2^3=8$ et que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc: $x^3-8>0$ équivalent à $x^3>8$ est réalisé lorsque $x>2$.
On aurait aussi pu conclure en factorisant x^3-8.
Cela donne: $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ avec $x^2+2x+4>0$. D'où la même conclusion.
On a alors:

x	0		2		$+\infty$
$S'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$S(x)$	‖	↘	12	↗	

Le minimum de peinture utilisée est obtenu pour $x=2$ et donc $l=\dfrac{4}{2^2}=1$.

Donc pour $x=2\,m$ et $l=1\,m$, on a l'aire minimum à peindre $S(2)=4+\dfrac{16}{2}=12\,m^2$.