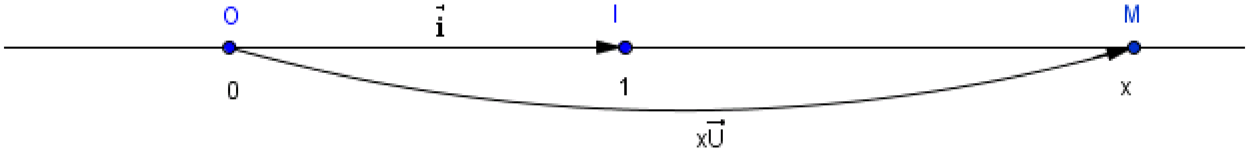
Utilisation des vecteurs pour le repérage

Repérage d'un point sur une droite



Pour repérer un point sur une droite $\mathscr{D}$, il suffit de connaître deux points:

- Le *point origine* O d'abscisse 0.
- Le *point unité* I d'abscisse 1.

On dit alors que le couple $(O\ ;\ I)$ est un *repère de la droite* $\mathscr{D}$.

Si l'on note $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$, le couple $(O\ ;\ \vec{i})$ est aussi appelé *repère de la droite* $\mathscr{D}$ et $\vec{i}$ est le *vecteur unitaire* de la droite $\mathscr{D}$.

Alors:

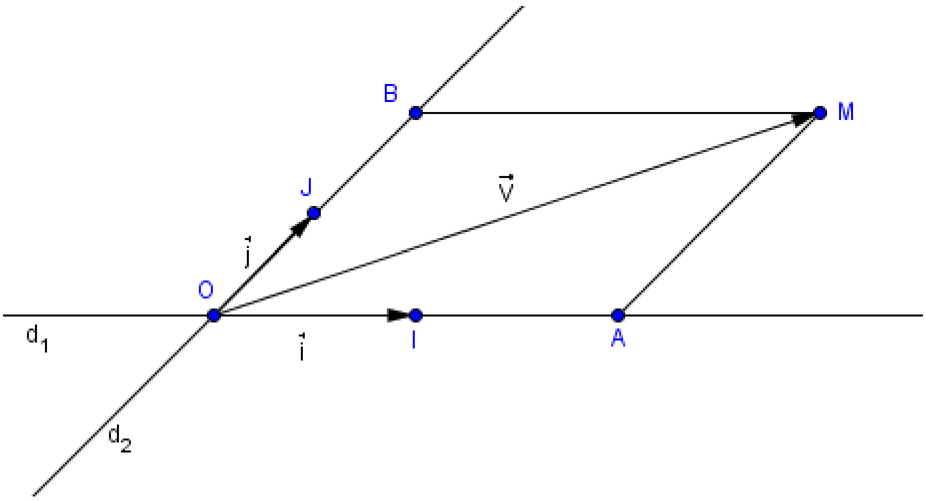
A tout point $M\in\mathscr{D}$, on associe le réel x unique tel que $\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}$. Le nombre réel x est l'abscisse du point M dans le repère $(O\ ;\vec{i})$.

Réciproquement, à tout nombre réel x, on associe un point M unique de la droite $\mathscr{D}$ tel que $\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}$. Le point M est l'image du réel x dans le repère $(O\ ;\vec{i})$ de la droite $\mathscr{D}$.

A tout vecteur directeur $\vec{V}$ de la droite $\mathscr{D}$, on associe un réel unique x tel que $\vec{V}=x\,\vec{i}$. On dit que le vecteur $\vec{i}$ constitue le *vecteur de base* de l'ensemble de tous les vecteurs de la droite $\mathscr{D}$ et que x est l'abscisse de $\vec{V}$ dans cette base.

Exemples:

Repérage d'un point dans le plan



Un repère du plan est déterminé par deux droites d_1 et d_2 sécantes en un point O.

La droite d_1 est munie d'un repère $(O\ ;\ I)$ ou $(O\ ;\ \vec{i})$ en posant $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$.

$\vec{i}$ est vecteur unitaire de l'axe des abscisses d_1.

La droite d_2 est munie d'un repère $(O\ ;\ J)$ ou $(O\ ;\ \vec{j})$ en posant $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

$\vec{j}$ est vecteur unitaire de l'axe des ordonnées d_2.

On remarquera que O, I et J ne sont pas alignés et donc que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires.

Le triplet $(O\ ;I\ ;J)$ constitué de trois points non alignés, ou ce qui revient au même, le triplet $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ composé d'un point et de deux vecteurs non colinéaires est appelé *repère du plan*.

En effet:

Si M est un point quelconque du plan; en construisant le parallélogramme $OAMB$ où $A\in d_1$ et $B\in d_2$, on obtient: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

Comme $A\in d_1$, on a $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{i}$ colinéaires. Il existe donc un réel unique x tel que $\overrightarrow{OA}=x\,\vec{i}$ (x est l'abscisse du point A dans le repère $(O\ ,\vec{I})$ de la droite d_1).

Comme $B\in d_2$, on a $\overrightarrow{OB}$ et $\vec{j}$ colinéaires. IL existe donc un réel unique y tel que: $\overrightarrow{OB}=y\,\vec{j}$ (y est l'abscisse du point B dans le repère $(O\ ;\ \vec{j})$ de la droite d_2).

On peut alors écrire: $\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$.

Réciproquement, à tout couple de réels $(x\ ;y)$, on peut associer par ce procédé de construction, un point M unique tel que: $\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$.

Conclusion:

Si le plan est muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, à tout point M du plan, on associe un couple unique $(x\ ;y)$ de réels tels que: $\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$.

On dit que $(x\ ;y)$ sont les *coordonnées de* M *dans le repère* $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. x est appelée *abscisse* de M et y l'*ordonnée* de M. On résume cela en écrivant: $M\ (x\ ;y)$.

En notant $\vec{V}=\overrightarrow{OM}$, on a alors: $\vec{V}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$. De même, à tout vecteur $\vec{V}$ du plan, on associe le couple unique $(x\ ;y)$ de réels tel que: $\vec{V}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$.

On dit que $(x\ ;y)$ sont les *coordonnées de* $\vec{V}$ *dans la base* $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$. x est appelée *abscisse* de $\vec{V}$ et y l'*ordonnée* de $\vec{V}$. On résume cela en écrivant: $\vec{V}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Réciproquement, à tout couple de réels $(x\ ;y)$, on associe:

un seul point M du plan qui est $M\ (x\ ;y)$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, c'est à dire tel que: $\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$.

un seul vecteur $\vec{V}$ du plan qui est $\vec{V}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$, c'est à dire tel que $\vec{V}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$.

En résumé:

Un repère $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$ du plan est constitué de trois points non alignés c'est à dire d'un point origine O et de deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires.

Une base de l'ensemble des vecteurs du plan est formé d'un couple $(\vec{i}\ ,\vec{j})$ de deux vecteurs non colinéaires.

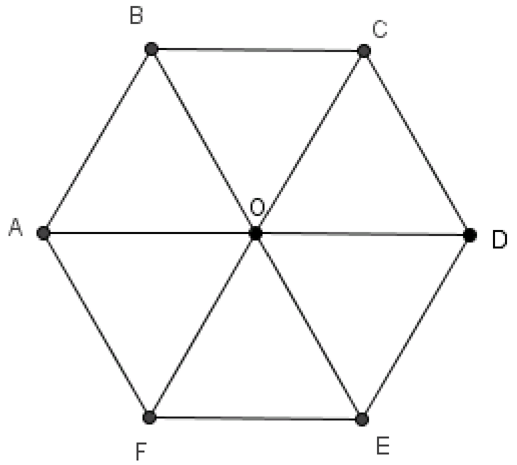
Écrire $M\ (x\ ;\ y)$ dans le repère $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$ signifie: $\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$.

Écrire $\vec{V}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}\ ;\vec{j})$ signifie: $\vec{V}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$.

Cas particuliers:

Repère orthogonal: lorsque $(OI)\perp(OJ)$. Quadrillage formé de rectangles.
Repère orthonormal (ou orthonormé): lorsque $(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ$.Quadrillage formé de carrés.

Exemples:



Dans le repère $(F\ ,\overrightarrow{FE}\ ,\overrightarrow{FE})$, on a:

Dans le repère $(O\ ,\overrightarrow{OE}\ ,\overrightarrow{OC})$, on a:

Propriétés des coordonnées

Dans un repère $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$ et une base $(\vec{i}\ ;\vec{j})$, on a:

Si $\vec{V}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{V'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors:

$\vec{V}=\vec{V'}$ équivaut à $x=x'$ et $y=y'$.

$\vec{V}+\vec{V'}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ Si $k\in\mathbb{R}$, alors: $k\,\vec{V}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$

Si $A\,(x_A\ ;\ y_A)$ et $B\,(x_B\ ;\ y_B)$, alors:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ Si I milieu de $[AB]$, alors: $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

Preuves de ces propriétés:

Condition de colinéarité de deux vecteurs dans une base

Si $\vec{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{U'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$, alors:

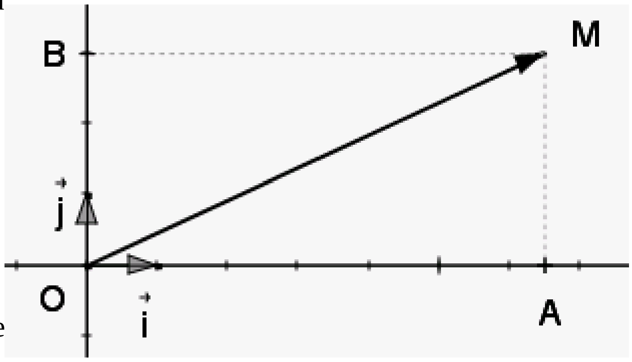
$\vec{U}$ et $\vec{U'}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' = yx'$.

Preuve:

Exemple:

Norme d'un vecteur et distances dans un repère orthonormal.

Dans le repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ ci-contre on a représenté le vecteur $\vec{U}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$.



On a alors:

$\vec{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans la base orthonormale $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

$M\ (x\ ;\ y)$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$

Donc, pour les distances: $OA=|x|$ et $OB=AM=|y|$.

Le triangle OAM étant rectangle en A, le théorème de Pythagore nous permet d'écrire: $OM^2=OA^2+AB^2=x^2+y^2$. Donc: $OM=\sqrt{x^2+y^2}$.

Si le vecteur $\vec{U}$ est représenté à un autre endroit, par exemple: $\vec{U}=\overrightarrow{CD}$, alors $OMDC$ est un parallélogramme et donc: $CD=OM$. Ceci montre que le nombre $\sqrt{x^2+y^2}$ ne dépend pas du représentant choisi pour représenter le vecteur $\vec{U}$. Ce nombre est la norme du vecteur $\vec{U}$. Elle se note: $\|\vec{U}\|$.

Définition: Si $\vec{U}=\overrightarrow{AB}$, alors la norme de $\vec{U}$ est $\|\vec{U}\|=AB$.

Propriétés:

Si $\vec{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans la base orthonormale $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$, alors: $\|\vec{U}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Si $A\,(x_a\ ;\ y_A)$ et $B\,(x_B\ ;\ y_B)$ dans le repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

On a donc: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Exemple: Si $A\,(1\ ;-2)$ et $B\,(-3\ ;5)$ dans le repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, alors:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-1\\5-(-1)\end{pmatrix}$ donc: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$ et donc: $AB=\sqrt{(-4)^2+6^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$