Vecteurs et configurations élémentaires

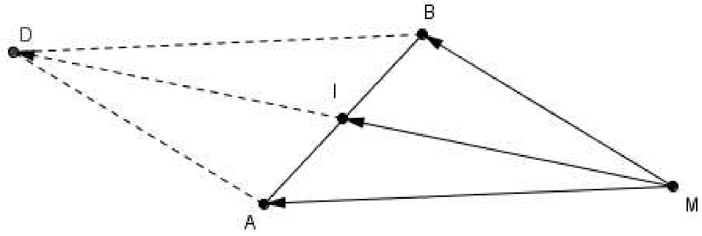
Milieu d'un segment

I milieu de [AB] peut se traduire par l'une des égalités vectorielles équivalentes suivantes:

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ $\quad$ $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IA}$ $\quad$ $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$\overrightarrow{AB}=2\,\overrightarrow{AI}$ $\quad$ $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{BA}=2\,\overrightarrow{BI}$ $\quad$ $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA}$

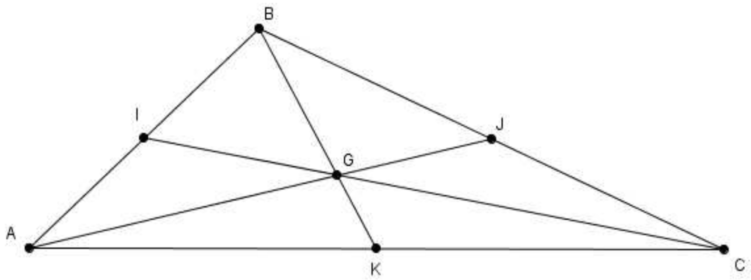
Si M est un point quelconque du plan
et si I est le milieu de $[AB]$,
alors: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\,\overrightarrow{MI}$.



Réciproquement:
Si A, B, C et D sont quatre points du plan tels que: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AD}$, alors D est le milieu de $[BC]$.

Centre de gravité d'un triangle

ABC est un triangle.
I est le milieu de $[AB]$.
J est le milieu de $[BC]$.
K est le milieu de $[CA]$.



Alors:

Il existe un point unique G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ce point G est aussi défini par les égalités: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\,\overrightarrow{AJ}$ $\quad$ $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\,\overrightarrow{BK}$ $\quad$ $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\,\overrightarrow{CI}$.

Ces égalités prouvent que G est le point d'intersection des trois médianes $[AJ]$, $[BK]$ et $[CI]$.
Les trois médianes sont donc concourantes en G qui est le centre de gravité du triangle ABC.

De plus, si M est un point quelconque du plan, on a: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\,\overrightarrow{MG}$

Propriété des milieux dans un triangle

Si ABC est un triangle.
et I est le milieu de $[AB]$.
et J est le milieu de $[BC]$.
alors: $\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{IJ}$