$1^{\text{ère}}$ S4 Devoir à la maison n°9

Pour mardi 3 mars 2009.

$(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un repère orthonormal direct du plan et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique.

K est le point symétrique de I par rapport à O.

L est le milieu de $[OK]$.

Le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre L passant par J coupe $[OI]$ en un point M.

N est le milieu de $[ON]$.

La médiatrice de $[OM]$ coupe le cercle $\mathscr{C}$ en deux points A et B. Placer A tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) > 0$.

1) Calculer les distances: LJ, OM et ON.
2) En déduire que: $\cos(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.
3) On a démontré dans le précédent devoir à la maison que: $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.
   a) En déduire $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
   b) Conclure que: $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{2\pi}{5}$.
4) Expliquer alors pourquoi [AI] est le côté d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$.
5) Compléter la construction du pentagone régulier $AIBCD$.