

1^{ère} S3 Devoir à la maison n°1

Pour Lundi 19 Septembre 2005.

On cherche à calculer le nombre $A(x; y) = 25x^4 - y^4 + 2y^2$
pour $x = 2\,403\,763\,488$ et $y = 5\,374\,978\,561$.

1) A l'aide de votre calculatrice et d'autres calculatrices (de modèles différents) de votre entourage, calculer $A(2\,403\,763\,488; 5\,374\,978\,561)$.

Réaliser un tableau comparatif des résultats obtenus. Qu'en pensez-vous?

2) Afin de résoudre de façon exacte ce problème, on va utiliser l'égalité (E) : $y^2 = 5x^2 + 1$.

a) Montrer que, si un couple $(x; y)$ vérifie l'égalité (E), alors: $A(x; y) = 1$.

b) La propriété réciproque est-elle vraie ?

c) Trouver deux entiers naturels simples vérifiant l'égalité (E).

d) Démontrer que si l'égalité (E) est vraie pour un couple $(x; y)$ quelconque, alors elle est encore vraie pour le couple $(X; Y) = (2xy; 5x^2 + y^2)$.

e) A l'aide des résultats des questions c) et d), déterminer des couples $(x; y)$ d'entiers naturels de plus en plus grands vérifiant l'égalité (E).

Constater que le couple $(2\,403\,763\,488; 5\,374\,978\,561)$ est ainsi obtenu.

f) Conclure!