

## 1<sup>ère</sup> S4 Devoir à la maison n°8

Pour le Mercredi 9 Avril 2008.

### Petite histoire vraie

Dans le courant des années 70, j'enseignais dans un collège de la banlieue parisienne. Un élève de cinquième, le petit Sylvain, particulièrement curieux et astucieux me dit: « M'sieur, je connais une façon de construire facilement n'importe quel polygone régulier inscrit dans un cercle, quel que soit le nombre de côtés. Si vous voulez, je vous montre pour cinq côtés: vous allez voir comment j'obtiens avec une règle et un compas, un beau pentagone régulier inscrit dans un cercle ! ».

Je résume ici ce qu'il a alors réalisé :

Je trace un cercle de diamètre  $[AB]$ , puis le triangle équilatéral  $ABC$ .

Je partage le segment  $[AB]$  en 5 parties égales et je prends le point  $D$  sur le segment  $[AB]$  situé à deux graduations de  $A$  et à trois de  $B$ . Il voulait dire que  $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB}$ .

La droite  $(CD)$  coupe le cercle en deux points. J'appelle  $E$  celui qui n'est pas situé entre  $C$  et  $D$ .

J'ai alors construit un côté du pentagone: c'est le segment  $[AE]$ .

Avec le compas, je reporte 4 fois la longueur  $AE$  sur le cercle et je peux ainsi tracer le pentagone complet.

Il ajouta: « Je suis à peu près sûr que ça marche quel que soit le nombre de côtés, car j'ai essayé pour les polygones de 3 à 10 côtés et la figure obtenue était bonne ». Il me montra son travail qui m'impressionna car, lors de mes études, aucun professeur n'avait parlé de cette méthode et je n'avais jamais lu cela dans aucun livre. Alors, même si cette construction était peut-être théoriquement approximative, elle apparaissant pratiquement exacte.

Le problème à traiter dans ce devoir est donc: dans quelle mesure Sylvain avait-il raison ?

### Précisions sur le vocabulaire

Pour  $n$  entier supérieur à 2, un polygone régulier convexe à  $n$  côtés inscrit dans le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  est défini par une suite de  $n$  points consécutifs  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  situés sur le cercle  $\mathcal{C}$  et vérifiant:

$$A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_4 = \dots = A_{n-1} A_n = A_n A_1 = L_n \text{ et}$$

$$(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}) = (\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}) = \dots = (\overrightarrow{OA_{n-1}}, \overrightarrow{OA_n}) = (\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{n}$$

Un tel polygone sera noté  $(P_n)$  dans ce problème.

### Configuration du problème pour une résolution simple

Soit un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  et  $\mathcal{C}$  le cercle trigonométrique associé à ce repère.

On place les points  $A, B, C$  et  $D$  tels que:  $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ ,  $\overrightarrow{OD} = \vec{j}$ ,  $\overrightarrow{OB} = -\vec{i}$  et  $\overrightarrow{OC} = -\sqrt{3}\vec{j}$ .

On vérifie facilement que  $ABC$  est un triangle équilatéral. Faites-le !

Pour tout entier  $n \geq 3$ , on définit le point  $I_n$  par:  $\overrightarrow{AI_n} = \frac{2}{n} \overrightarrow{AB}$ .

La droite  $(CI_n)$  coupe le cercle  $\mathcal{C}$  en deux points. Celui qui n'appartient pas au segment  $[CI_n]$  est appelé  $E_n$ .

### Problématique

Le petit Sylvain prétendait que, pour tout entier  $n \geq 3$ ,  $AE_n = L_n$ .

Le but du problème est de découvrir s'il avait raison !

## Étude du problème

I) Réaliser la construction de  $E_3$ ,  $E_4$ ,  $E_5$ ,  $E_6$  et  $E_{10}$ .

II)

1) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n \geq 3$ , la droite  $(CI_n)$  a pour équation cartésienne:

$$nx\sqrt{3} + (4-n)y + (4-n)\sqrt{3} = 0.$$

2) En utilisant l'équation du cercle  $\mathcal{C}$ , démontrer que, pour tout entier naturel  $n \geq 3$ , l'abscisse  $x_n$  de  $E_n$  est solution de l'équation du second degré d'inconnue  $x$  :

$$2(n^2 - 2n + 4)x^2 - 3n(n-4)x + (n-4)^2 = 0.$$

3) Résoudre cette équation dans les cas particuliers où  $n = 3$ , puis  $n = 4$ .

4) En déduire les coordonnées cartésiennes  $(x_3; y_3)$  de  $E_3$  et  $(x_4; y_4)$  de  $E_4$ .

5) Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 5$ , les coordonnées cartésiennes  $(x_n; y_n)$  de  $E_n$  sont:

$$x_n = \frac{(n-4)(3n + \sqrt{n^2 + 16n - 32})}{4(n^2 - 2n + 4)} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{(n\sqrt{n^2 + 16n - 32} - (n-4)^2)\sqrt{3}}{4(n^2 - 2n + 4)}.$$

6) Utiliser ces formules pour calculer les coordonnées cartésiennes  $(x_5; y_5)$  de  $E_5$  et  $(x_6; y_6)$  de  $E_6$ .

7) Pour tout entier naturel  $n \geq 3$ , on note  $\alpha_n$  l'angle polaire  $\alpha_n = (\vec{i}; \overrightarrow{OE_n})$ .

a) Déduire des questions précédentes la mesure principale, en radians, des angles  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  et  $\alpha_6$ .

b) Conclure que:

$[AE_3]$  est le côté d'un triangle équilatéral inscrit dans  $\mathcal{C}$ .

$[AE_4]$  est le côté d'un carré inscrit dans  $\mathcal{C}$ .

$[AE_6]$  est le côté d'un hexagone régulier inscrit dans  $\mathcal{C}$ .

III)

1) Montrer que, pour tout entier naturel  $n \geq 3$ , la longueur des côtés du polygone régulier  $(P_n)$  est:

$$L_n = 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

2)

a) Quelles sont les coordonnées polaires de  $E_n$  ?

b) Pour tout entier naturel  $n \geq 3$ , exprimer  $x_n$  et  $y_n$  en fonction de  $\alpha_n$ .

c) Montrer que, pour tout entier naturel  $n \geq 3$ , on a:  $AE_n = \sqrt{2(1 - x_n)}$ .

3) En utilisant votre calculatrice ou un tableur, déterminer une approximation à  $10^{-6}$  des distances  $L_n$  et  $AE_n$  pour les entiers naturels  $n$  tels que:

a)  $3 \leq n \leq 12$ .

b)  $n = 50$ .

c)  $n = 100$ .

d)  $n = 200$ .

e)  $n = 500$ .

f)  $n = 1000$ .

4)

a) Étudier l'évolution de la différence entre  $L_n$  et  $AE_n$  en fonction du nombre  $n$  de côtés, c'est à dire l'erreur absolue constatée  $L_n - AE_n$ .

b) Étudier de même l'évolution de l'erreur relative  $\frac{L_n - AE_n}{AE_n}$  en fonction de  $n$ .

c) Conclure !