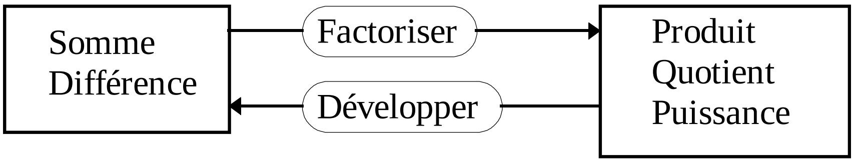
Développements et factorisations

1. Transformations d'écritures: développements et factorisations.



Une différence est une somme, car: $a - b = a + (-b)$.

Un quotient est un produit, car: $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ ($b \neq 0$).

Une puissance est un produit, car: $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times . \times . \times . \times a \times a}_{n \text{ facteurs}}$.

2. Puissances dans $\mathbb{R}$

Puissances d'une somme.	Puissances d'une différence.
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

Dans le développement de $(a + b)^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on a une somme de $n + 1$ termes de la forme $k_p\, a^p\, b^q$, où les exposants des puissances de a décroissent de n à 0, les exposants des puissances de b croissent de 0 à n tels que $p + q = n$. Quant aux coefficients k_p , ils sont déterminés par la méthode du triangle de Pascal qui sera étudiée en classe terminale.

Dans le développement de $(a - b)^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on a les mêmes $n + 1$ termes que ceux du développement de $(a + b)^n$, mais au lieu d'avoir une simple somme, les signes d'opération + ou − sont alternés, le premier étant + : Il suffit d'appliquer la règle du signe d'un produit.

Somme de 2 puissances de même exposant impair	Différence de 2 puissances de même exposant
	$a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)$
$a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$	$a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$
	$a^4 - b^4 = (a - b)\,(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
$a^5 + b^5 = (a + b)\,(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$	$a^5 - b^5 = (a - b)\,(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

Dans la factorisation de $a^n + b^n$ où n est un entier naturel impair supérieur ou égal à 3, on a pour premier facteur $(a + b)$. Le deuxième facteur contient n termes de la forme $\pm\, a^p\, b^q$, où les exposants des puissances de a décroissent de $n - 1$ à 0, les exposants des puissances de b croissent de 0 à $n - 1$ tels que $p + q = n - 1$. Quant aux signes + ou − , ils sont alternés, le premier et le dernier étant +.

Dans la factorisation de $a^n - b^n$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on a pour premier facteur $(a - b)$. Le deuxième facteur est la somme de n termes de la forme $a^p\, b^q$, où les exposants des puissances de a décroissent de $n - 1$ à 0, les exposants des puissances de b croissent de 0 à $n - 1$ tels que $p + q = n - 1$.

Résultats qui seront utilisés lors de l'étude des suites géométriques:

$$x^n - a^n = (x - a)\,(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots\dots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

$$1 - x^{n+1} = (1 - x)\,(1 + x + x^2 + \dots\dots + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n)$$