Formulaire de trigonométrie

Périodicité des fonctions trigonométriques

Pour tout réel x et tout entier relatif k, on a:

$\sin(x+2k\pi)=\sin x$ période 2π

$\cos(x+2k\pi)=\cos x$ période 2π

$\tan(x+k\pi)=\tan x$ période 2π

Zéros des fonctions trigonométriques

$\sin x=0$ si et seulement si $x=k\pi$

$\cos x=0$ si et seulement si $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\tan x=0$ si et seulement si $x=k\pi$

où k est un entier relatif quelconque.

Relations fondamentales entre les fonctions trigonométriques

Pour tout réel x: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

Pour tout réel $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ où k est un entier relatif quelconque, on a: $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

Valeurs des fonctions trigonométriques pour quelques angles remarquables

Angle x		sin x	cos x	tan x
Radians	**Degrés**			
0	0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90	1	0	
π	180	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	270	-1	0	
2π	360	0	1	0

Angles associés

Pour tout réel x et tout entier relatif k, on a:

$\sin(-x) = -\sin x$ $\cos(-x) = \cos x$ $\tan(-x) = -\tan x$	$\sin(2k\pi - x) = -\sin x$ $\cos(2k\pi - x) = \cos x$ $\tan(2k\pi - x) = -\tan x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\tan(\pi + x) = \tan x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x}$

NB: faire attention à l'ensemble de définition de la fonction tangente.

Formules d'addition et de soustraction

Pour tout réel a et b, on a:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \text{ avec } a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \text{ avec } a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Formules de duplication

Pour tout réel a , on a:

$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \text{ avec } 2a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Formules de triplement

Pour tout réel a , on a:

$$\sin(3a) = 3\sin a - 4\cos^3 a$$

$$\cos(3a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\tan(3a) = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a} \text{ avec } 3a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Formules de factorisation

Pour tout réel a et b, on a:

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \text{ avec } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \text{ avec } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Formules de Werner

Pour tout réel a et b, on a:

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

Sin *x* et Cos *x* en fonction de tan *(x/2)*

Pour tout réel $x \neq (2k+1)\pi$ où k est un entier relatif, on a:

$$\sin x = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Puissances des fonctions trigonométriques

Pour tout réel x, on a:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin(3x)) \qquad \cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos(3x))$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3) \qquad \cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)$$

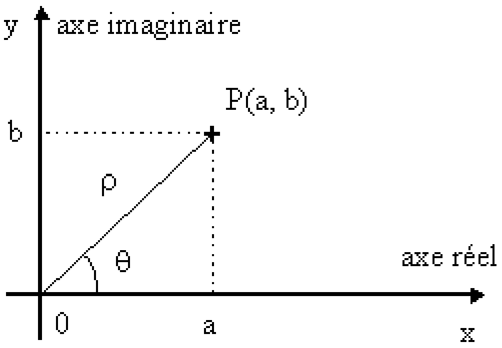
Forme trigonométrique des nombres complexes

Le nombre complexe $a+ib$ représenté sur le plan cartésien par le point P peut être exprimé aussi sous la forme : $a+ib=\rho\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$

où ρ est le module (distance de P à l'origine)
et θ est l'argument (angle que la demi-droite (OP) forme avec le demi-axe des réels positifs)

On a : $a=\rho\cos\theta$, $b=\rho\sin\theta$ et $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$

avec le module $\rho>0$ et l'argument θ tel que $-\pi<\theta\leqslant\pi$.



Produit et quotient de nombres complexes en forme trigonométrique

Étant donnés deux nombres complexes :

$$z_1=\rho_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right) \qquad \text{et} \qquad z_2=\rho_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)$$

on a: $$z_1 z_2=\rho_1\rho_2\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)$$

et: $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right)$$

Formule de Moivre

Si $z=\rho\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$, alors, pour tout entier naturel n, on a: $z^n=\rho^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)$

Formules d'Euler

$$\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \qquad \mathrm{e}^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$$

En particulier: $\mathrm{e}^{i\pi}=-1$ et $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}=i$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2\mathrm{i}}$$

Nombres complexes sous forme exponentielle

$$a+ib=\rho\,(\cos\theta+i\,\sin\theta)=\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$$

Limites

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)=1$$

Dérivées

$$\cos'=-\sin$$

$$\sin'=\cos$$

$$\tan'=\frac{1}{\cos^2}=1-\tan^2$$